

UE3 : Algorithmes et Complexité

Michel Van Caneghem

Décembre 2003

Objectifs du cours

Les progrès des matériels informatiques et la complexité des problèmes posés maintenant à l'Informatique demandent une nouvelle analyse. Il faut donc :

- ✓ Fournir les outils mathématiques nécessaires à l'analyse des performances d'un algorithme.
- ✓ Avoir une idée de ce qui est faisable et infaisable actuellement.
- ✓ Améliorer les performances des problèmes *faciles*.
- ✓ Savoir comment aborder les problèmes *difficiles*.

Quelques Livres

- ✗ *Algorithms in C (Java) : Fundamentals, Data Structures, Sorting, Searching* de **Robert Sedgewick (EUR 52,64)**
- ✗ *The Art of Computer Programming* de **Donald Ervin Knuth (EUR 142,14) – 3 volumes - Prochaine édition 2004.**
- ✗ *Introduction à l'analyse des algorithmes* de **Robert Sedgewick, Philippe Flajolet (EUR 43,16)**
- ✗ *Introduction to Computational Molecular Biology* de **Joao Meidanis, Joao Carlos Setubal (EUR 111,31)**

Quelques Livres (2)



Licence 3^e année • Master 1^{er} et 2^e années

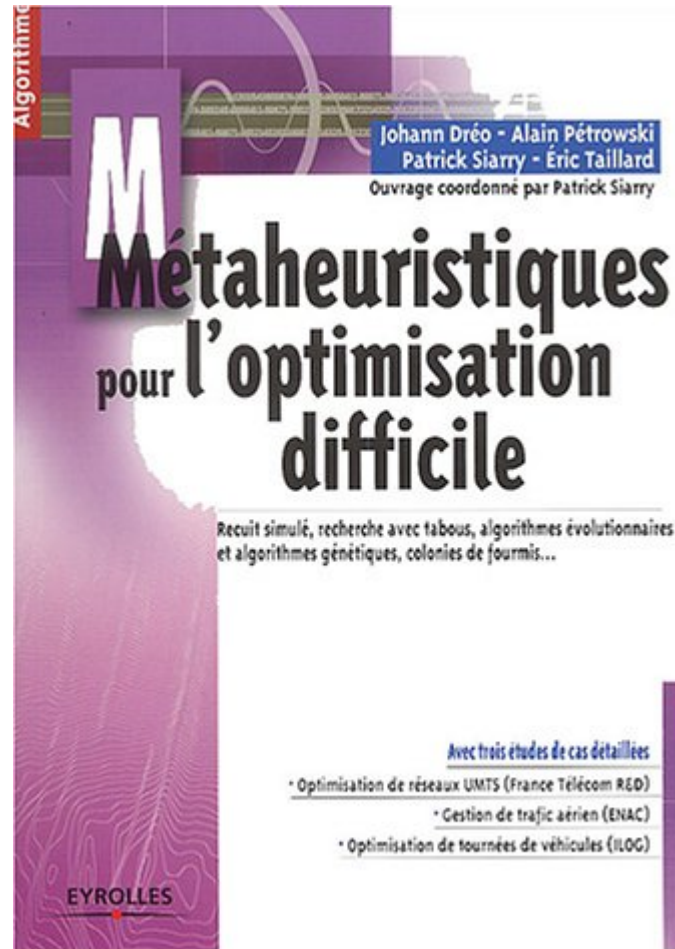
EXERCICES ET PROBLÈMES D'ALGORITHMIQUE

144 énoncés avec solutions détaillées

Bruno Baynat • Philippe Chrétienne
Claire Hanen • Safia Kedad-Sidhoum
Alix Munier-Kordon • Christophe Picouleau

DUNOD

Prix 33,25 €



Recuit simulé, recherche avec tabous, algorithmes évolutionnaires
et algorithmes génétiques, colonies de fourmis...

Avec trois études de cas détaillées

- Optimisation de réseaux UMTS (France Télécom RED)
- Gestion de trafic aérien (ENAC)
- Optimisation de tournées de véhicules (ILOG)

Prix 42,75 €

Quelques rappels mathématiques

Le but est d'exprimer les performances d'un programme, en quantité de mémoire et en temps d'exécution, à l'aide de fonctions qui dépendent de la taille des données.

- Notion de limites : quand n est *grand*.**
- Relations de récurrences.**
- Notions de combinatoire.**
- Éléments de théorie des graphes.**

Limites

Il faut comparer les taux d'accroissement de différentes fonctions qui mesurent les performances d'un programme.

Notation “o” : On dit que $f(x) = o(g(x))$ pour $x \rightarrow \infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Ce qui veut dire que f croît plus lentement que g quand x est très grand. Par exemple :

$$x^2 = o(x^5)$$

$$\sin x = o(x)$$

$$14.709\sqrt{x} = o(x/2 + 7 \cos x) \quad 23 \log x = o(x^{0.002})$$

Limites (2)

Règle de l'Hôpital : Si on a une forme indéterminée ∞/∞ alors :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Notation “ O ” : On dit que $f(x) = O(g(x))$ s’il existe k et x_0 tels que :

$$x > x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < kg(x)$$

La notation o est plus précise que O , mais O est plus facile à calculer et suffisant. Par exemple :

$$\sin x = O(x) \quad \sin x = O(1)$$

Limites (3)

Notation “ \sim ” : On dit que $f(x) \sim g(x)$ si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Par exemple :

$$(3x + 1)^4 \sim 81x^4 \quad 2^x + 7 \log x + \cos x \sim 2^x$$

Un classement des fonctions

Groupe 1 :

$$\log \log x, \quad \log x, \quad \log^2 x$$

Groupe 2 :

$$x^{0.2}, \quad x, \quad x^2, \quad x^{15} \log x$$

Groupe 3 :

$$e^{\sqrt{x}}, \quad 1.03^x, \quad 2^x$$

Groupe 4 :

$$n!, \quad n^n, \quad 2^{x^2}$$

RAPPELS :

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x = e^{x \log a}$$

Remarque

	2	16	64	256
$\log \log n$	0	2	2.58	3
$\log n$	1	4	6	8
n	2	16	64	256
$n \log n$	2	64	384	2048
n^2	4	256	4096	65536
2^n	4	65536	1.84467e+19	1.15792e+77
$n!$	2	2.0923e+13	1.26887e+89	8.57539e+506

Calcul de sommes

Pour calculer la limite de :

$$F(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

On remplace ce calcul par celui des intégrales suivantes :

$$\int_0^n f(t) dt \leq F(n) \leq \int_1^{n+1} f(t) dt$$

Bien sur si f est une fonction croissante. Quelques exemples :

$$F(n) = \sum_{i=1}^n i^p$$

On trouve :

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} \leq F(n) \leq \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1}$$

Calcul de sommes (2)

Pour calculer $n!$:

$$n! = \prod_{i=1}^n i \quad \Rightarrow \quad \log n! = \sum_{i=1}^n \log i$$

On sait que la primitive de $\log x$ est $x \log x - x$. On a donc :

$$n \log n - n \leq \log n! \leq (n + 1) \log(n + 1) - n$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \frac{(n + 1)^{n+1}}{e^n}$$

Formulaire

Formule de Stirling :

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{23}{288n^2} + \dots\right)$$

Quelques sommes connues :

$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

mais aussi :

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

$$\log \frac{1}{1 - x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$

Formulaire (2)

Série harmonique :

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou $\gamma = 0,57721$.

Un excellent formulaire ou vous avez toutes les formules de mathématiques dont vous avez besoin se trouve à l'adresse suivante : <http://www.csc.lsu.edu/~seiden/cheat.pdf>. Cette adresse ne marche plus !

Relations de récurrence

Relations du premier ordre

La solution de : $x_n = b_n x_{n-1}$ avec x_0 donné est :

$$x_n = x_0 \prod_{i=1}^n b_i$$

de manière plus générale la solution de : $x_n = b_n x_{n-1} + c_n$ avec x_0 donné est :

$$x_n = \left(\prod_{i=1}^n b_i \right) \left(x_0 + \sum_{i=1}^n d_i \right)$$

avec :

$$d_i = \frac{c_i}{\prod_{k=1}^i b_k}$$

Relations de récurrence (2)

Un exemple :

$$x_{n+1} = 3x_n + n, \quad x_0 = 0$$

On calcule : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$. **On pose :** $x_n = 3^n y_n$ **et cela donne :**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{3^{n+1}}, \quad y_0 = 0$$

et donc :

$$y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{3^{i+1}} = \frac{1}{3^n} \frac{3^n - 2n - 1}{4}$$

et finalement :

$$x_n = \frac{3^n - 2n - 1}{4}$$

On vérifie : $x_1 = 0$, $x_2 = (9 - 5)/4 = 1$, $x_3 = (27 - 7)/4 = 5$

Récurrance du second ordre

Pour trouver les solutions de :

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}, \quad x_0, x_1$$

On calcule les racines α_1 et α_2 du polynôme caractéristique : $x^2 = ax + b$ et on a :

$$x_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n$$

On trouve les constantes en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ x_1 = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 \end{cases}$$

Si la racine est double alors les solutions sont de la forme suivante :

$$x_n = \alpha^n(C_1 + C_2n)$$

Récurrances du second ordre (2)

Appliquons le travail précédent aux nombres de Fibonacci :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = F_1 = 1$$

Soit $\phi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ **et** $\phi_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ **les racines de l'équation caractéristique** $x^2 = x + 1$. **On trouve :**

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\phi_1^{n+1} - \phi_2^{n+1})$$

Quand n **est grand, cela est équivalent à :**

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\phi_1^{n+1} = 0.724 \times 1.618^n$$

On trouve $F_{100} = 6 \times 10^{20}$

Récurrances du second ordre (3)

Reprenons : $x_{n+1} = 3x_n + n$, $x_0 = 0$. **On peut écrire :**

$$x_{n+1} = 3x_n + n$$

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + n + 1$$

d'ou : $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 1$

et : $x_{n+3} - 5x_{n+2} + 7x_{n+1} - 3x_n = 0$

Le polynôme caractéristique est : $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 = (x - 1)^2(x - 3)$ **et la solution générale est :**

$$x_n = C_1 + C_2n + C_33^n$$

avec $C_1 = -1/4$, $C_2 = -1/2$, $C_3 = 1/4$.

Les séries génératrices

Soit une suite : $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$

On lui fait correspondre la série formelle (dite génératrice) :

$$u(\diamond) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \diamond^n$$

$$u_n = 1 \implies \frac{1}{1 - \diamond} = 1 + \diamond + \diamond^2 + \dots + \diamond^n + \dots$$

$$u_n = c^n \implies \frac{1}{1 - c\diamond} = 1 + c\diamond + c^2\diamond^2 + \dots + c^n\diamond^n + \dots$$

$$u_n = n \implies \frac{\diamond}{(1 - \diamond)^2} = \diamond + 2\diamond^2 + \dots + n\diamond^n + \dots$$

Les séries génératrices (2)

Méthode que nous allons voir sur un exemple :

$$u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n, \quad u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2$$

Soit $u(X)$ la série génératrice de u_n . Alors $\frac{u(X)-u_0}{X}$ est celle correspondant à u_{n+1} et $\frac{u(X)-u_0-u_1X}{X^2}$ est celle correspondant à u_{n+2} , ... On obtient alors en remplaçant u_{n+3}, u_{n+2}, \dots par leur valeurs :

$$\begin{aligned} u(X)(1 - 5X + 8X^2 - 4X^3) &= \\ u_0 + (u_1 - 5u_0)X + (u_2 - 5u_1 + 8u_0)X^2 &= X - 3X^2 \end{aligned}$$

Les séries génératrices (3)

$$u(X) = \frac{X - 3X^2}{1 - 5X + 8X^2 - 4X^3} = \frac{-2}{1 - X} + \frac{2.5}{1 - 2X} + \frac{-0.5}{(1 - 2X)^2}$$

$$\frac{-2}{1 - X} = -2(1 + X + X^2 + \dots + X^n + \dots)$$

$$\frac{2.5}{1 - 2X} = 2.5(1 + 2X + 4X^2 + \dots + 2^n X^n + \dots)$$

$$\frac{-0.5}{(1 - 2X)^2} = -0.5(1 + 4X + 12X^2 + \dots + (n + 1)2^n X^n + \dots)$$

d'où le total :

$$u(X) = X + 2X^2 + \dots + (-2 + 2.5 \times 2^n - 0.5(n + 1)2^n)X^n + \dots$$

et enfin : $u_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$

Les séries génératrices (4)

Considérons la suite :

$$u_{n+1} - 3u_n = n = v_n, \quad u_0 = 0$$

On a :

$$v(X) = 0 + 1X + 2X^2 + \dots + nX^n + \dots = \frac{X}{(1-X)^2}$$

on en déduit :

$$\frac{u(X) - u_0}{X} - 3u(X) = \frac{X}{(1-X)^2}$$

et :

$$u(X) = \frac{X^2}{(1-3X)(1-X)^2}$$

Les séries génératrices (5)

$$\frac{X^2}{(1-3X)(1-X)^2} = \frac{1/4}{(1-X)} + \frac{-1/2}{(1-X)^2} + \frac{1/4}{(1-3X)}$$

d'ou :

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4}3^n$$

Une inéquation de récurrence

Considérons la suite :

$$x_{n+1} \leq x_n + x_{n-1} + n^2$$

On va montrer par récurrence que $x_n \leq K\alpha^n$. Pour tout $t > 0$ posons $\alpha^2 - \alpha - 1 = t$ (par exemple $t = 0.01$).

En considérant la récurrence :

$$x_{n+1} \leq K\alpha^n + K\alpha^{n-1} + n^2 = K\alpha^{n-1}(\alpha + 1) + n^2$$

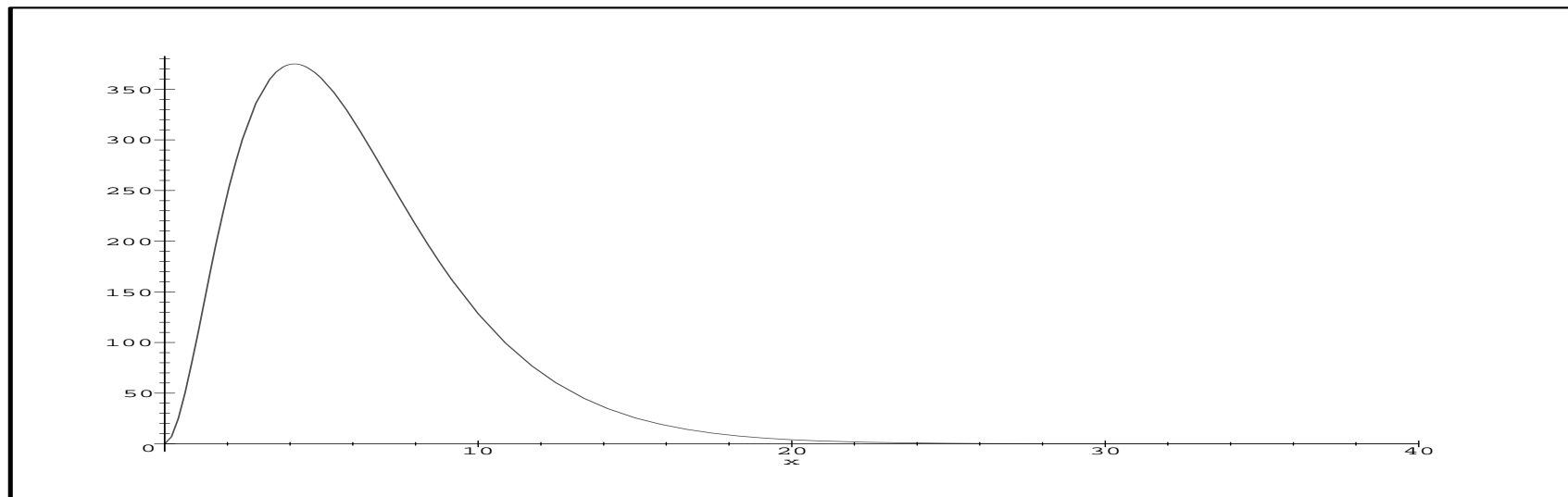
$$x_{n+1} \leq K\alpha^{n+1} - (tK\alpha^{n-1} - n^2)$$

Il faut donc que

$$K > \max \frac{n^2}{t\alpha^{n-1}}$$

Une inéquation de récurrence (2)

Avec $t = 0.01$, on trouve $\alpha = 1.622497216$. Traçons alors la courbe : $f(x) = \frac{x^2}{t\alpha^{x-1}}$.



d'ou $x_n = O(\alpha^n) = O((\phi + \epsilon)^n)$, $\phi = 1.618033989$