Graphes

Stéphane Grandcolas

Aix-Marseille Université

2022-2023

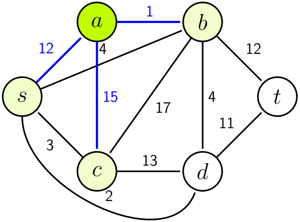
Graphes

Plan du cours :

- exemples, définitions,
- plus courts chemins : Dijkstra,
- plus courts chemins : Bellman-Ford,
- arbres couvrants de poids minimal (ACM) : (Prim, Kruskal),

Graphes

Représentent une relation, une distance.



Souvent utilisés pour modéliser des problèmes

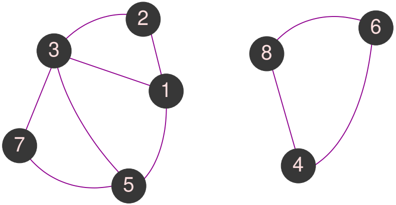
- calcul de plus courts chemins,
- calcul de flots minimaux,
- calcul d'arbres couvrants de poids minimal,
- coloriage,
- ...

Graphe (non orienté)

Un graphe est défini par ses sommets et ses arêtes

Graphe $G = (S, A)$

- S : ensemble des sommets,
- A : ensemble des arêtes, $A = \{\{u, v\} | u, v \in S\}$



(1,2)	(4,6)
(2,3)	(8,4)
(1,3)	(7,5)
(1,5)	(3,5)
(3,7)	(8,6)

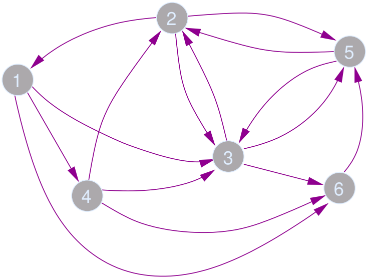
La représentation graphique d'un graphe aide à le visualiser.

Chaque arête est schématisée par une ligne entre ses deux sommets.

Graphe orienté

Défini par ses sommets et ses arcs

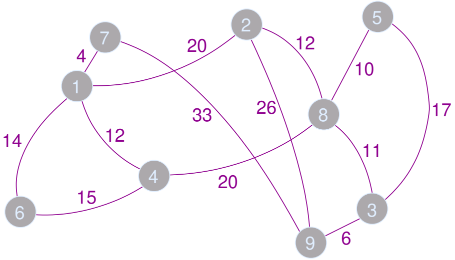
$G = (S, A)$, avec $A = \{(u, v) | u, v \in S\}$ un ensemble d'*arcs*



Graphe pondéré

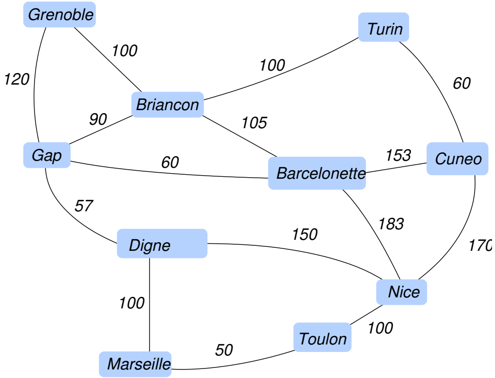
Chaque arête (resp. arc) a un poids

$G = (S, A, w)$: $w(u, v)$ est le poids de l'arête (u, v).



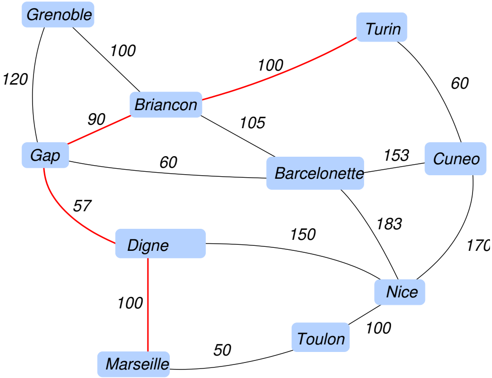
Dans le cas d'un graphe orienté chaque arc est pondéré.
$w(u, v)$ est le poids de l'arc (u, v), $w(v, u)$ est le poids de l'arc (v, u).

Exemple : trajet le plus court entre deux villes



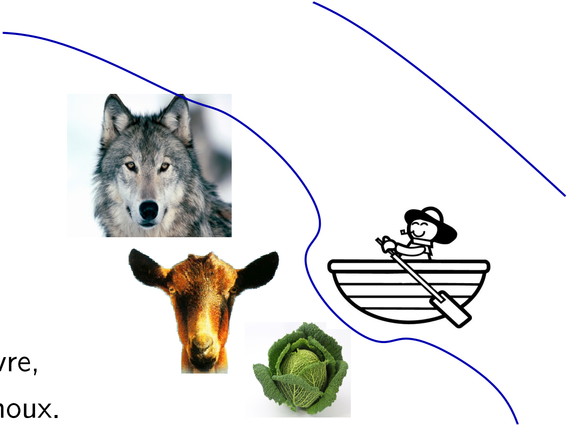
Graphe représentant les liaisons routières et les durées des trajets

Exemple : trajet le plus court entre deux villes



Calcul d'un **plus court chemin** entre Marseille et Turin

Exemple : le choux, la chèvre et le loup



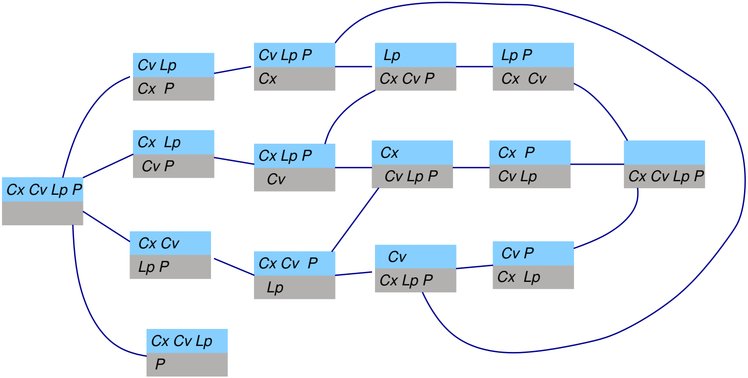
Conflits :

- loup et chèvre,
- chèvre et choux.

Problème : est-il possible de faire traverser la rivière au choux, à la chèvre et au loup, sans perte ?

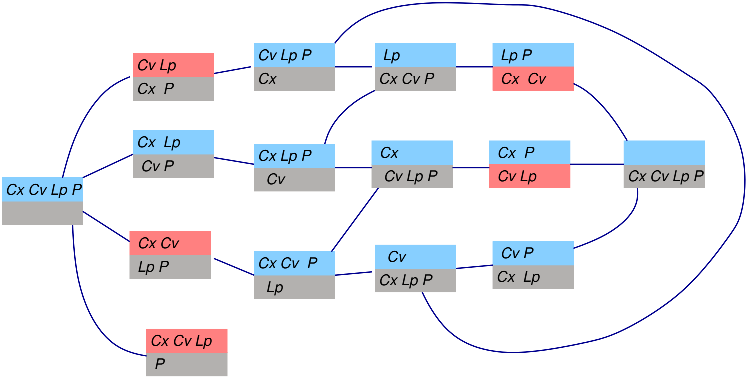
On modélise le problème par un calcul de plus court chemin dans un graphe.

Exemple : le choux, la chèvre et le loup



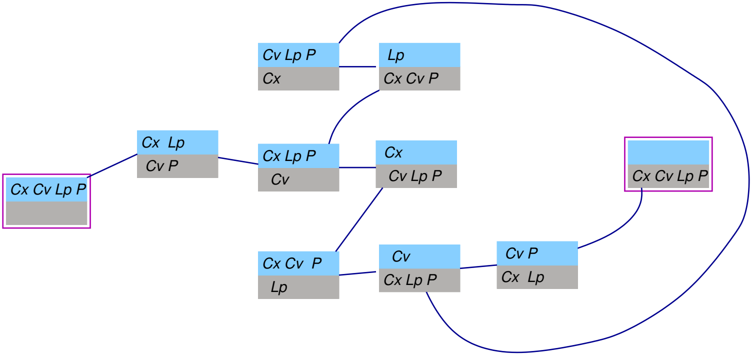
Graphe représentant les états et les transitions

Exemple : le choux, la chèvre et le loup



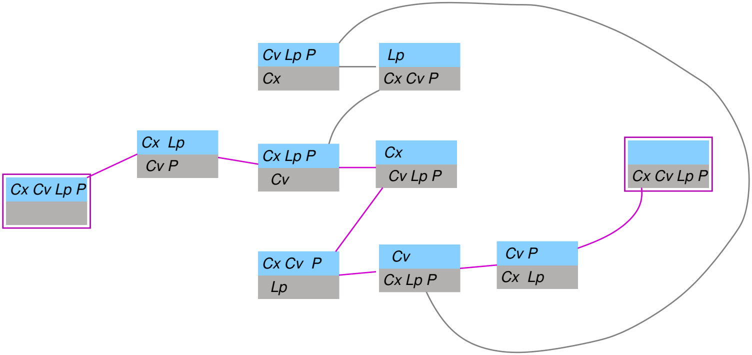
Elimination des états conflictuels

Exemple : le choux, la chèvre et le loup



Problème : trouver un chemin dans le graphe entre l'état initial et l'état final, avec le moins d'arêtes possible.

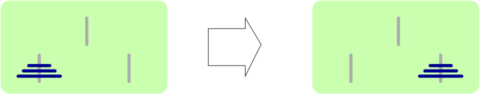
Exemple : le choux, la chèvre et le loup



Un algorithme de calcul de plus court chemin (Dijkstra par exemple) produit une solution avec le moins de traversées possible.

Exemple : problème des tours de Hanoï

Trois tours, n disques de tailles toutes différentes

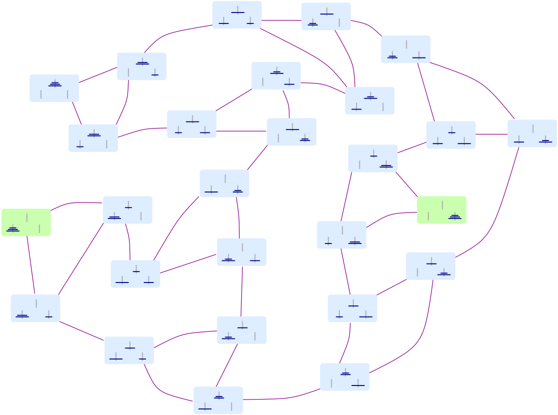


- **mouvements :** déplacer un disque sur une autre pile,
- **contrainte :** respecter l'ordre des tailles,
- **objectif :** déplacer tous les disques d'une tour à une autre en effectuant le moins de mouvements possible.

Exemple : problème des tours de Hanoï

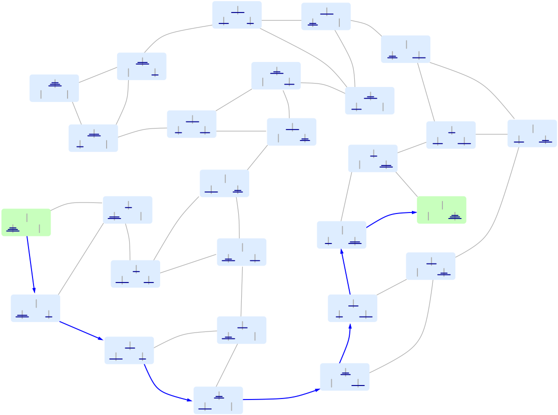
Sommets : tous les états valides (3^n états)

Exemple : problème des tours de Hanoï.



Arêtes : les mouvements

Exemple : problème des tours de Hanoï



Un **plus court chemin** entre l'état initial et l'objectif représente une plus courte séquence de mouvements pour déplacer les disques (il faut $2^n - 1$ mouvements).

Graphes : vocabulaire

voisinage

cycles

arbre

chemin

graphe connexe

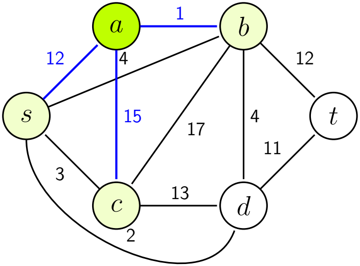
circuit

plus court chemin

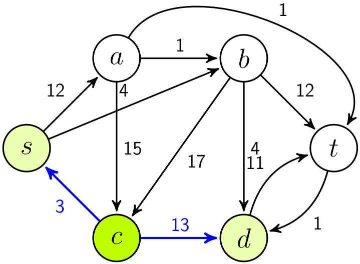
composantes connexes

graphe complet

Graphes : voisinage



Graphe non orienté

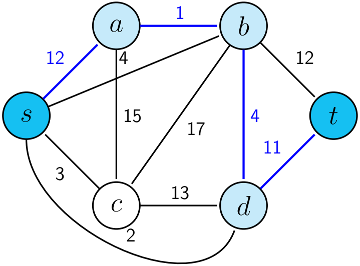


Graphe orienté

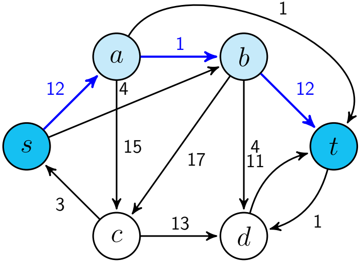
$$Voisins(u) = \{v \in S | (u, v) \in A\}$$

Les voisins de u sont les sommets v tels que le graphe contient l'arête (u, v) (resp. l'arc (u, v)).

Graphes : chemins



Graphe non orienté

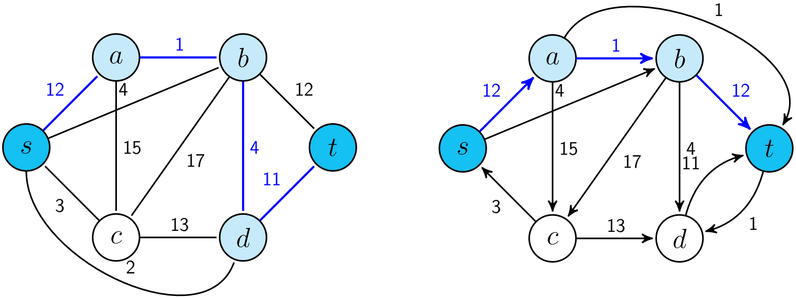


Graphe orienté

Chemin : $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ avec $(u_1, u_2), \ldots, (u_{k-1}, u_k) \in A$.

Suite de sommets telle que pour tout sommet u_i, $i < k$, le graphe contient l'arête (resp. l'arc) (u_i, u_{i+1}).

Graphes : chemins



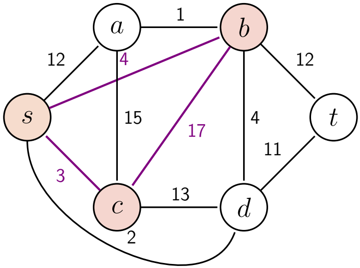
Graphe non orienté

Graphe orienté

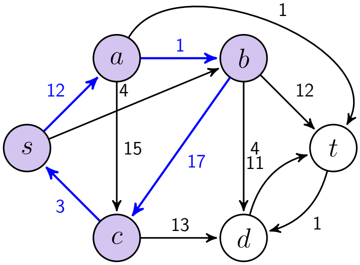
Chemin : $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ avec $(u_1, u_2), \ldots, (u_{k-1}, u_k) \in A$.

Longueur : $\sum_{i=1}^{k-1} w(u_i, u_{i+1})$

Graphes : cycles, circuits



Graphe non orienté

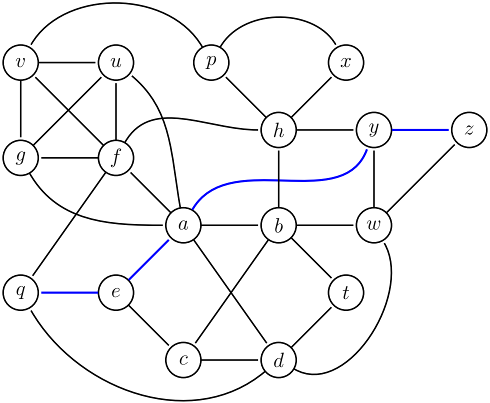


Graphe orienté (circuit)

Cycle : $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$

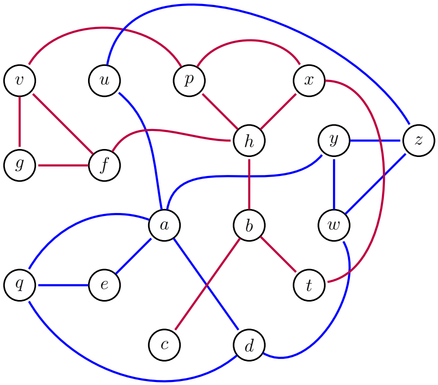
avec $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \ldots, (u_k, u_1) \in A$.

Graphe connexe



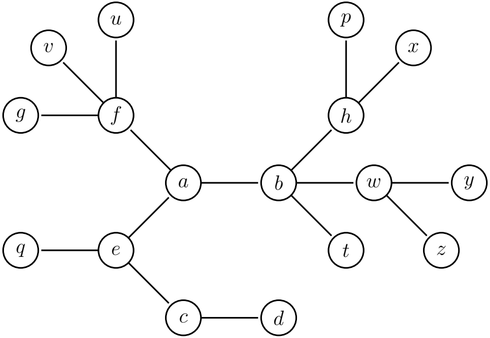
Le graphe est connexe si pour tous sommets u et v il existe un chemin joignant u à v

Graphe non connexe



Composantes connexes : sous-graphes connexes maximaux

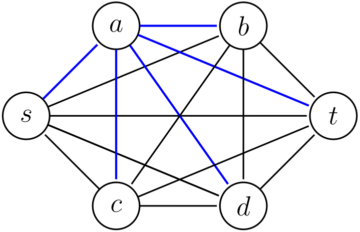
Arbre



Arbre : graphe connexe et sans cycle

n sommets $\Rightarrow n-1$ arêtes

Graphe complet

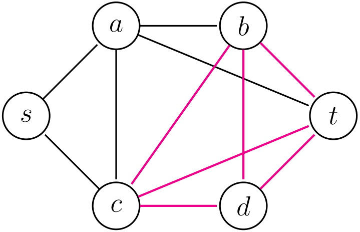


Chaque sommet est connecté avec tous les autres :

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n \times (n-1)/2 \text{ arêtes}$$

densité : proportion d'arêtes présentes (100% pour un graphe complet)

Clique



Une **clique** est un sous-graphe complet (graphe induit par un sous-ensemble de sommets)

Clique max : plus grande clique

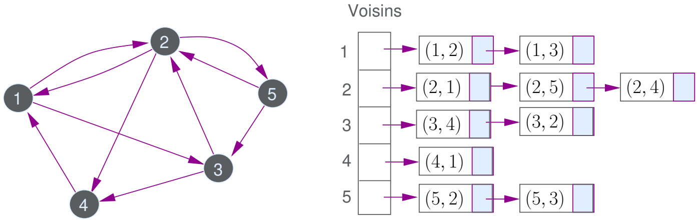
Représentation

- listes d'adjacences,
- matrice d'adjacence,
- liste des arêtes (ou arcs).

La représentation doit être adaptée aux algorithmes que l'on va utiliser.

Dans ce qui suit les sommets sont numérotés de 1 à n. Lors de la mise en oeuvre (dans un programme C, Java,...) on utilisera la numérotation $0, \ldots, n-1$ correspondant à l'indexation standard dans un tableau.

Représentation par des listes d'adjacence

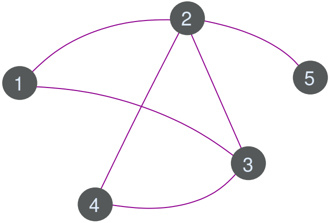


A chaque sommet est associée la **liste** de ses voisins.

Représentation : tableau de listes, indexé sur les sommets

(généralement des listes chainées contenant des arcs)

Représentation avec des matrices d'adjacence



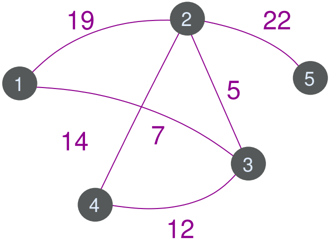
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & F & V & V & F & F \\ 2 & V & F & V & V & V \\ 3 & V & V & F & V & F \\ 4 & F & V & V & F & F \\ 5 & F & V & F & F & F \end{array}$$

M

$$M_{ij} = \begin{cases} V & si\ le\ graphe\ contient\ l'arête\ (i,j) \\ F & sinon \end{cases}$$

Pour chaque paire/couple de sommets un **booléen** indique s'ils sont voisins.

Représentation avec des matrices d’adjacence



	1	2	3	4	5
1	0	19	7	∞	∞
2	19	0	5	14	22
3	7	5	0	12	∞
4	∞	14	12	0	∞
5	∞	22	∞	∞	0

Graphe pondéré : une deuxième matrice est nécessaire.

Quand la pondération représente une distance on utilise $+\infty$ pour indiquer qu’il n’y a pas d’arête.

Plus courts chemins

$G = (S, A, w)$ un graphe pondéré.

La longueur du chemin $(u_1, \ldots, u_k)$ est

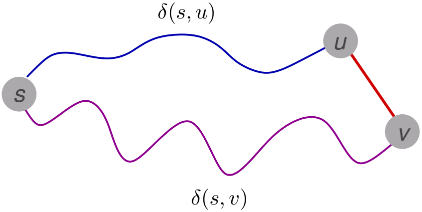
$$\sum_{i=1}^{k-1} w(u_i, u_{i+1})$$

Notation :

$$\delta(u, v)$$

la longueur du plus court chemin de u à v.

Plus courts chemins



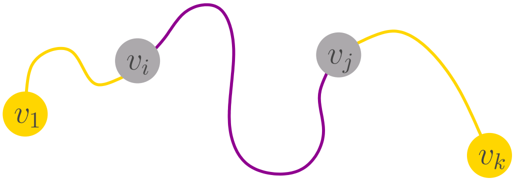
Propriété 1. Soit $s, u, v \in S$ tels que $(u, v) \in A$,

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v)$$

Si ce n'était pas le cas on aurait un chemin de longueur inférieure à $\delta(s, v)$ finissant par l'arête (u, v), ce qui contredit la définition de $\delta(s, v)$.

Plus courts chemins

Propriété 2. Soit $(v_1, \dots, v_k)$ un plus court chemin,



alors, pour tous sommets v_i, v_j de ce chemin,

$$(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j) \text{ est un plus court chemin entre } v_i \text{ et } v_j.$$

Si ce n'était pas le cas on aurait un chemin plus court entre v_1 et v_k empruntant le plus court chemin entre v_i et v_j.

Algorithme de Dijkstra.

Calcul des plus courts chemins

- à partir d'un sommet donné, le sommet **source,**
- graphes orientés ou non orientés,
- arcs de poids **positifs ou nuls,**
- la bonne représentation du graphe : des **listes d'adjacence.**

L'algorithme de Dijkstra *découvre* les plus courts chemins vers les autres sommets du graphe en commençant par les plus courts.

Algorithme de Dijkstra.

Notations.

- s : source.
- $d[u]$: distance, indexée sur les sommets. A tout moment

$$\forall u \in S,\ d[u] \geq \delta(s, u)$$

Pendant le déroulement de l'algorithme, $d[u]$ représente la longueur du chemin le plus court entre s et u découvert **à ce stade.**

Algorithme de Dijkstra.

- Initialement

$$\forall u \in S,\ u \neq s,\ d[u] = \infty,$$
$$d[s] = 0.$$

(longueur du PCC de s à s)

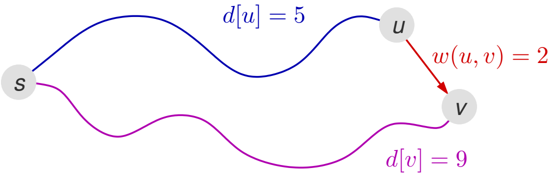
- Lorsque l'algorithme termine

$$\forall u \in S,\ d[u] = \delta(s, u).$$

Algorithme de Dijkstra : opération de relachement.

Relachement de l'arc $(u, v) \longrightarrow$ affinage de la borne $d[v]$.

Si $d[v] > d[u] + w(u, v)$ alors on remplace $d[v]$ par $d[u] + w(u, v)$

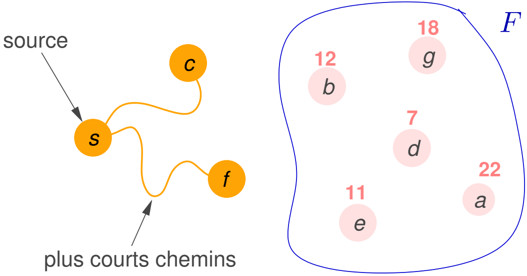


relachement de l'arc $(u, v) \Rightarrow d[v] = 7$

On peut étendre le chemin de longueur 5 de s à u, en un chemin de longueur 7 de s à v.

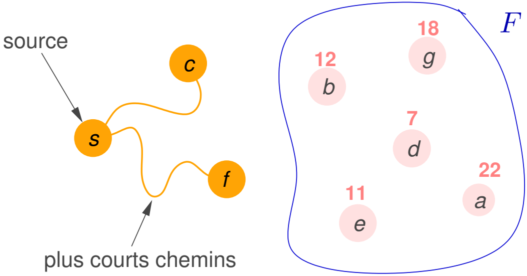
Algorithme de Dijkstra.

File de priorité F



Pour tout sommet u non dans F, on a $d[u] = \delta(u)$.

Algorithme de Dijkstra.

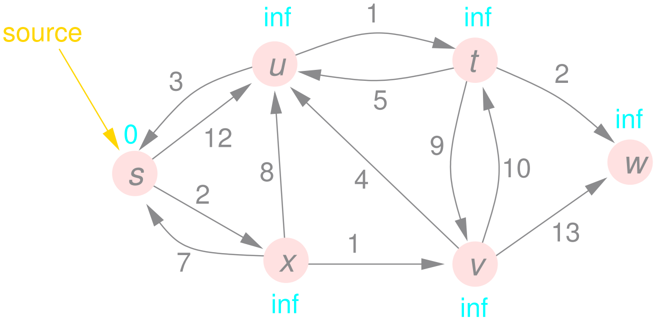


Itération :

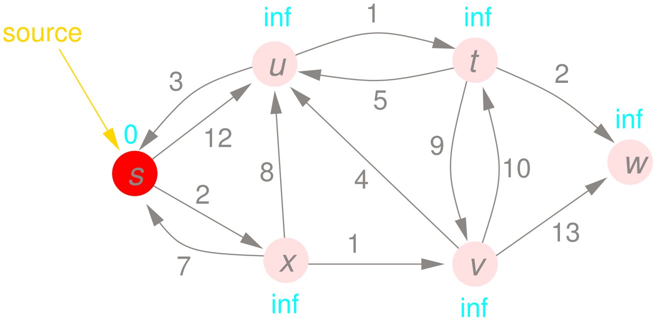
- extraction d'un sommet u de F de distance $d[u]$ minimale,
- relachement des arcs sortants de u.

Propriété : au moment de l'extraction le sommet u vérifie $d[u] = \delta(u)$

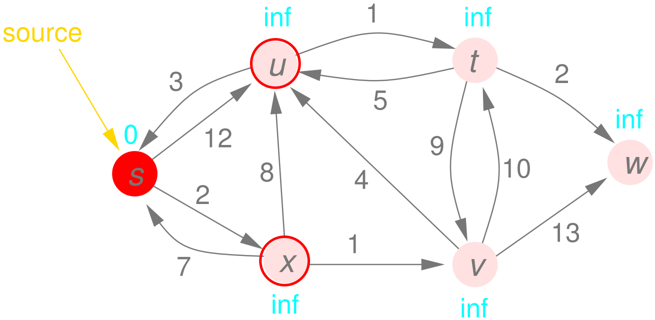
Plus courts chemins : Dijkstra.



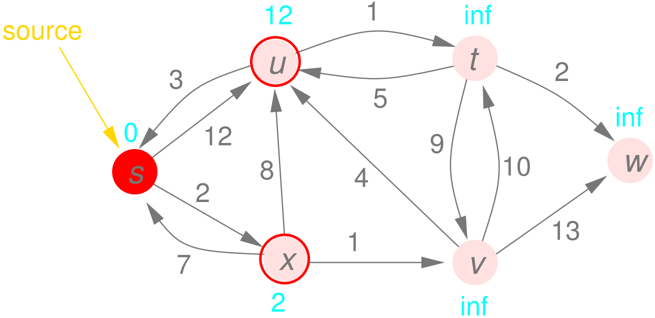
Plus courts chemins : Dijkstra.



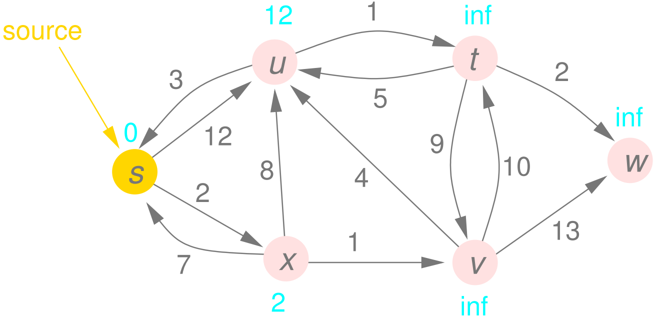
Plus courts chemins : Dijkstra.



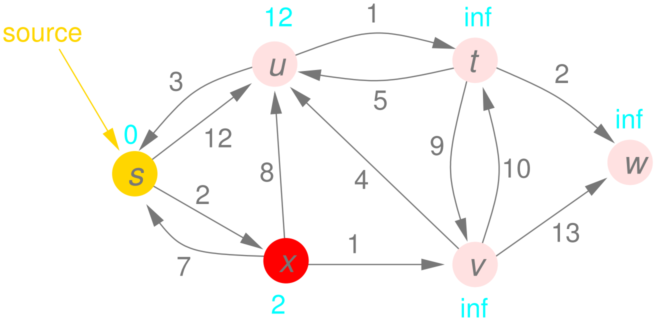
Plus courts chemins : Dijkstra.



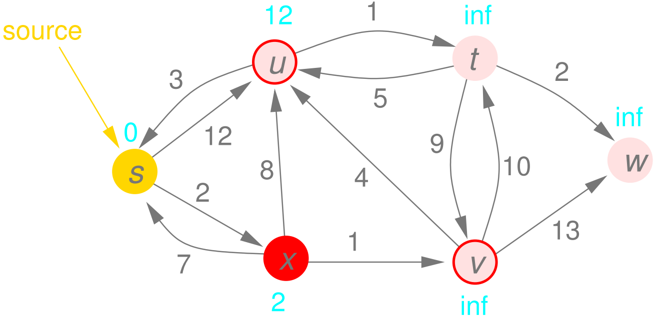
Plus courts chemins : Dijkstra.



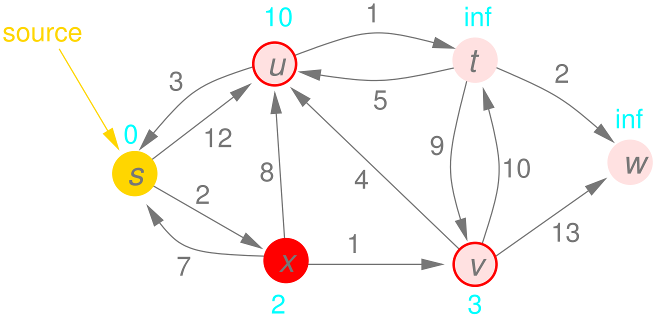
Plus courts chemins : Dijkstra.



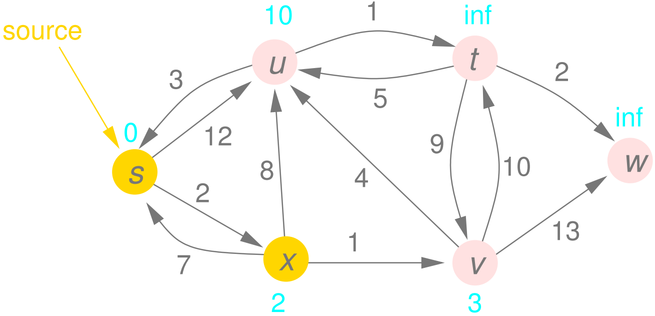
Plus courts chemins : Dijkstra.



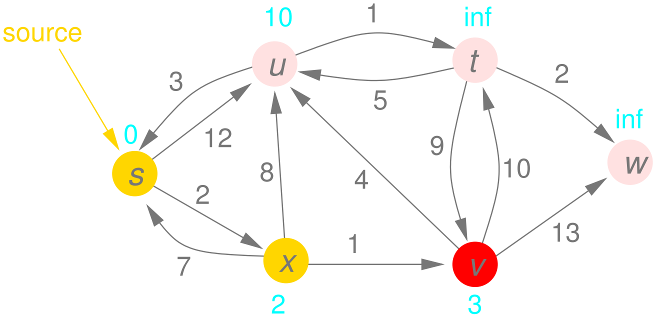
Plus courts chemins : Dijkstra.



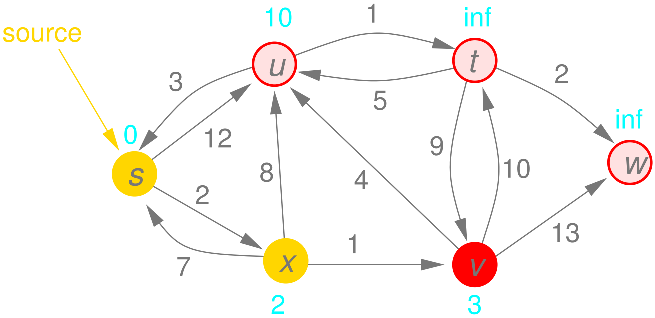
Plus courts chemins : Dijkstra.



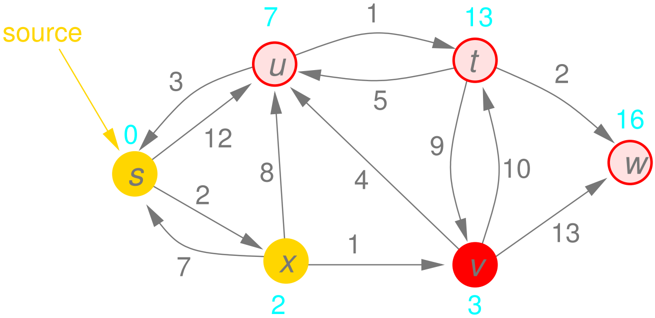
Plus courts chemins : Dijkstra.



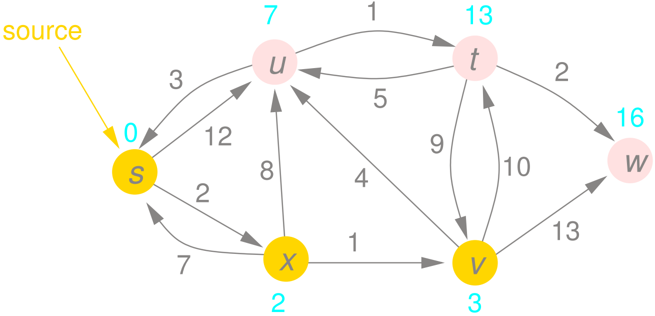
Plus courts chemins : Dijkstra.



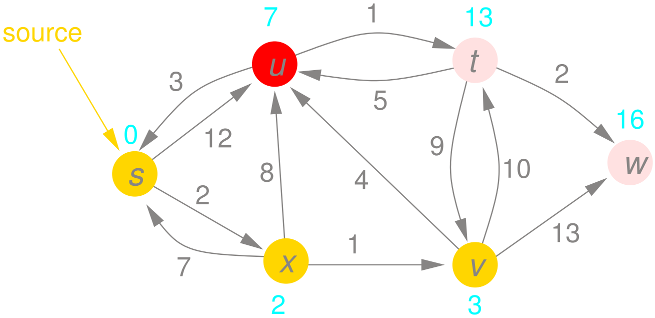
Plus courts chemins : Dijkstra.



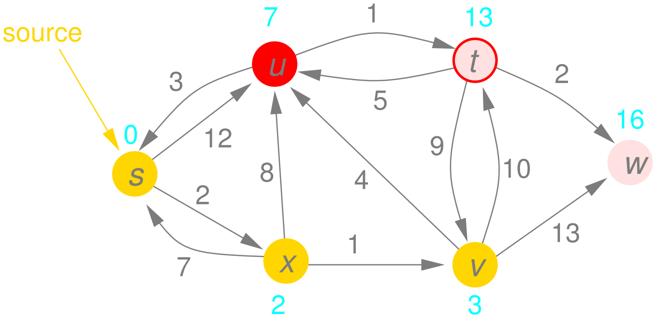
Plus courts chemins : Dijkstra.



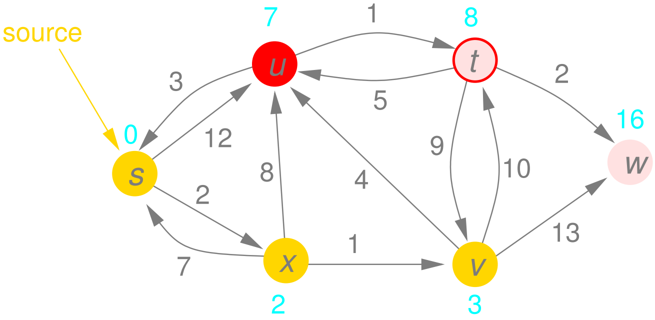
Plus courts chemins : Dijkstra.



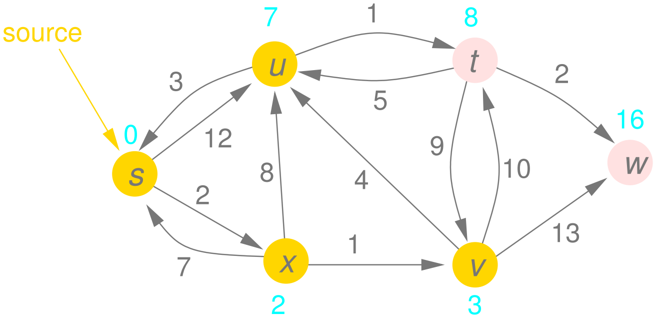
Plus courts chemins : Dijkstra.



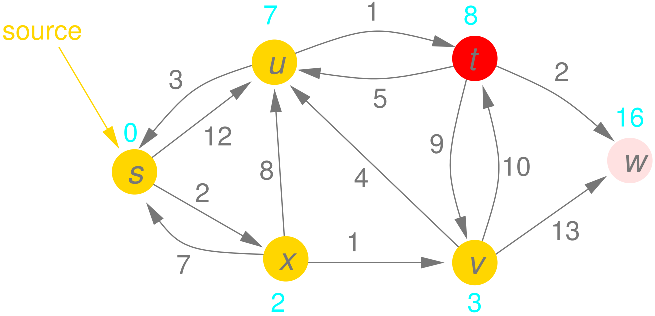
Plus courts chemins : Dijkstra.



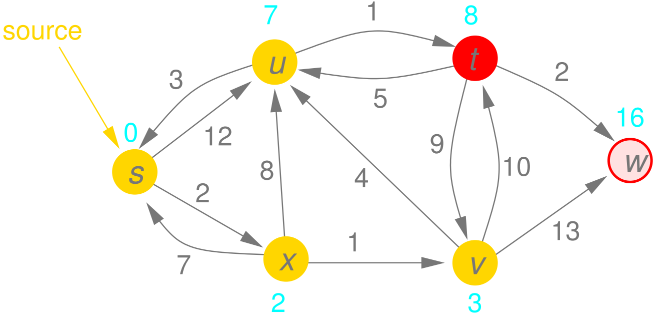
Plus courts chemins : Dijkstra.



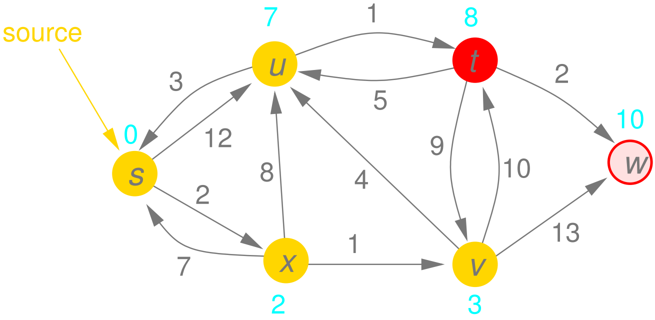
Plus courts chemins : Dijkstra.



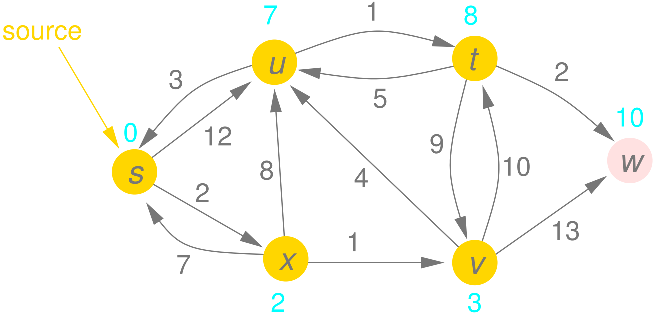
Plus courts chemins : Dijkstra.



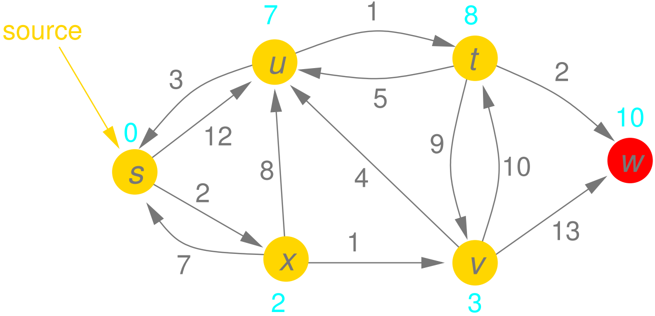
Plus courts chemins : Dijkstra.



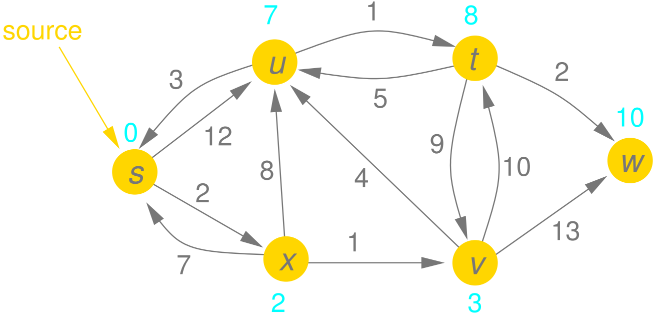
Plus courts chemins : Dijkstra.



Plus courts chemins : Dijkstra.



Plus courts chemins : Dijkstra.



Algorithme de Dijkstra.

algorithme PCC-DIJKSTRA(G, s)
in : $G = (S, A, w)$ un graphe pondéré, s un sommet de G
(F une file de priorité)

$F := S$, *{i.e. initialement F contient tous les sommets}*
pour chaque sommet $u \in S$ **faire**
    $d[u] := \infty$,
$d[s] := 0$, ($pred[s]$:=NONE)
tant que $F \neq \emptyset$ **faire**
    u :=EXTRAIRE_LE_MIN(F, d),
    pour chaque arc $(u, v) \in A$ **faire**
        si $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **alors**
            $d[v] = d[u] + w(u, v)$, ($pred[v] := u$)
    fin pour,
fin tant que,
renvoyer d, (et $pred[]$)

Algorithme de Dijkstra.

algorithme PCC-DIJKSTRA(G, s)
in : $G = (S, A, w)$ un graphe pondéré, s un sommet de G
(n le nombre de sommets, m le nombre d'arcs)

$F := S$, $\quad O(n)$
pour chaque sommet $u \in S$ **faire**
  $d[u] := \infty$, $\quad O(n)$
$d[s] := 0$,
tant que $F \neq \emptyset$ **faire**
  $u :=$ EXTRAIRE_LE_MIN(F, d), $\quad n \times O(n)$
  pour chaque arc $(u, v) \in A$ **faire**
    si $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **alors** $\quad m$ fois
      $d[v] = d[u] + w(u, v)$, $\quad$ *(m : nombre d'arêtes)*
  fin pour,
fin tant que,
renvoyer d,

F : tableau contenant des sommets
EXTRAIRE_LE_MIN(F) : parcours du tableau
Coût total : $O(n^2)$

Algorithme de Dijkstra.

EXTRAIRE_LE_MIN(F) : parcours du tableau

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	6	8	10	3	7	2	4	1	9	5	0

7 sommets

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0	4	18	11	9	2	14	6	23	4	14

F représente l'ensemble $\{6, 8, 10, 3, 7, 2, 4\}$

Algorithme de Dijkstra.

EXTRAIRE_LE_MIN(F) : parcours du tableau

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	6	8	10	3	$\boxed{7}$	2	4	1	9	5	0

7 sommets

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0	4	18	11	9	2	14	$\boxed{6}$	23	4	14

Le sommet 7 est celui qui a la plus petite distance $d[7] = 6$.

Algorithme de Dijkstra.

EXTRAIRE_LE_MIN(F) : parcours du tableau

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	6	8	10	3	7	2	4	1	9	5	0

7 sommets

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0	4	18	11	9	2	14	6	23	4	14

On extrait de F le sommet 7.

Algorithme de Dijkstra.

EXTRAIRE_LE_MIN(F) : parcours du tableau

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	6	8	10	3	4	2	7	1	9	5	0

6 sommets

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0	4	18	11	9	2	14	6	23	4	14

F représente l'ensemble $\{6, 8, 10, 3, 4, 2\}$

Algorithme de Dijkstra.

algorithme PCC-DIJKSTRA(G, s)
in : $G = (S, A, w)$ un graphe pondéré, s un sommet de G
(n le nombre de sommets, m le nombre d'arcs)

$F := S$,	$O(n)$
pour chaque sommet $u \in S$ **faire**	
$d[u] := \infty$,	$O(n)$
$d[s] := 0$,	
tant que $F \neq \emptyset$ **faire**	
$u :=$EXTRAIRE_LE_MIN(F, d),	$n \times O(\log\ n)$
pour chaque arc $(u, v) \in A$ **faire**	
si $d[v] > d[u] + w(u, v)$ **alors**	
$d[v] = d[u] + w(u, v)$,	$m \times O(\log\ n)$
DIMINUER_LA_CLE$(v, d[v], F)$,	$m \times O(\log\ n)$
fin pour,	
fin tant que,	
renvoyer d,	

F : tas binaire.
Extraire le min, diminuer la clé : $O(\log n)$.
Coût total : $O(m \times \log\ n)$

Algorithme de Dijkstra : complexité

En faisant une recherche linéaire dans F : $\mathcal{O}(|S|^2 + |A|)$

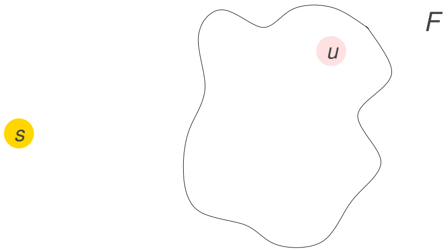
En implémentant F avec un tas binaire :

- *initialisations :* $\mathcal{O}(|S|)$
- *Construction du tas :* $\mathcal{O}(|S|)$
- *maintien du tas :*
  $\mathcal{O}(|S| \times \log |S| + |A| \times \log |S|) = \mathcal{O}(|A| \times \log |S|)$

Le coût total est $\mathcal{O}(|A| \times \log |S|)$ si le graphe est connexe

($\mathcal{O}(|S| \times \log |S| + |A|)$ avec un tas de Fibonacci)

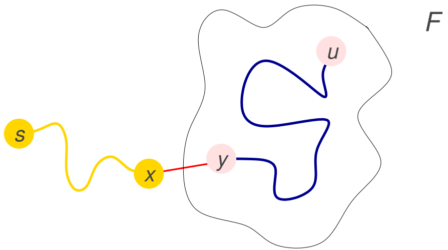
Algorithme de Dijkstra : preuve.



Supposition : quand u est extrait de F, $d[u] > \delta(s, u)$

[on suppose que u est le premier dans ce cas]

Algorithme de Dijkstra : preuve.

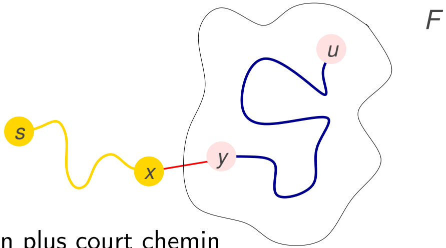


Supposition : quand u est extrait de F, $d[u] > \delta(s, u)$

[on suppose que u est le premier dans ce cas]

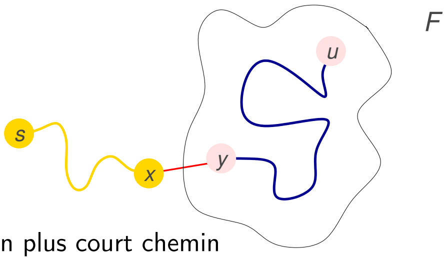
- considérons un plus court chemin entre s et u,
- soit y le premier sommet de ce chemin qui est dans F, et x le sommet précédent y dans le chemin.

Algorithme de Dijkstra : preuve.



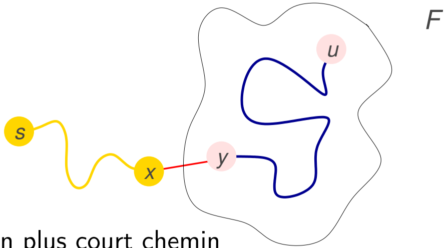
- le chemin jaune est un plus court chemin
  (car sous chemin d'un plus court chemin entre s et u)

Algorithme de Dijkstra : preuve.



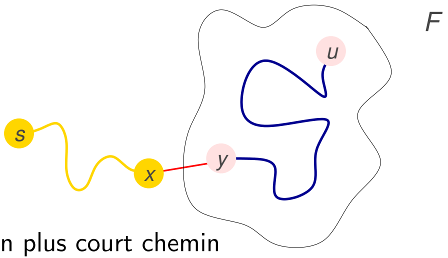
- le chemin jaune est un plus court chemin
  (car sous chemin d'un plus court chemin entre s et u)
- le chemin jaune et l'arête rouge idem, et $\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$,

Algorithme de Dijkstra : preuve.



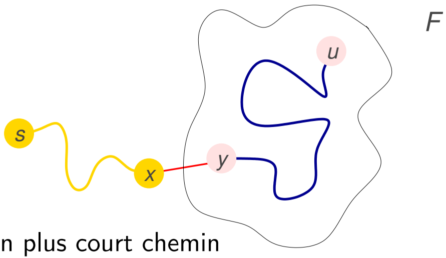
- le chemin jaune est un plus court chemin
  (car sous chemin d'un plus court chemin entre s et u)
- le chemin jaune et l'arête rouge idem, et $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$,
- l'arête (x, y) a été relachée, donc $d[y] = \delta(s, y)$,

Algorithme de Dijkstra : preuve.



- le chemin jaune est un plus court chemin
  (car sous chemin d'un plus court chemin entre s et u)
- le chemin jaune et l'arête rouge idem, et $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$,
- l'arête (x, y) a été relachée, donc $d[y] = \delta(s, y)$,
- $d[u] \leq d[y]$ puisqu'on a extrait u et non pas y,

Algorithme de Dijkstra : preuve.



- le chemin jaune est un plus court chemin
  (car sous chemin d'un plus court chemin entre s et u)
- le chemin jaune et l'arête rouge idem, et $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$,
- l'arête (x, y) a été relachée, donc $d[y] = \delta(s, y)$,
- $d[u] \leq d[y]$ puisqu'on a extrait u et non pas y,

donc $d[u] \leq \delta(s, u)$ ce qui contredit l'hypothèse $d[u] > \delta(s, u)$.