Domaine Sciences et Technologies
LICENCE INFORMATIQUE

Aix*Marseille université

Algorithmique 1 : Exercices
Code UE : S04IN4A2

Année 2018-2019

1 Calcul de l'élément majoritaire.

Etant donné un ensemble E de n éléments, le problème de l'élément majoritaire consiste à identifier, si il existe, un élément qui apparait plus d'une fois sur deux dans E, c'est à dire un élément dont le nombre k d'occurences est plus grand que $n/2$.

Méthode 1.

Donnez une méthode naive pour ce calcul. Quelle est sa complexité ?

Méthode 2 : diviser pour régner.

On considère maintenant l'approche *diviser pour régner* suivante : pour calculer un élément majoritaire dans l'ensemble E s'il existe, on répartit les n éléments de E dans deux ensembles E_1 et E_2 de même taille, et on relance (récursivement) le calcul de l'élément majoritaire dans chacun de ces deux ensembles.
Démontrer que si e n'est majoritaire ni dans E_1 ni dans E_2 alors e ne peut pas être majoritaire dans E. En déduire une procédure de calcul correspondant à cette idée. Quelle est sa complexité ?

Méthode 3.

L'algorithme suivant permet de résoudre le problème avec une complexité optimale. Pour mieux voir les choses, supposons que l'on ait à déterminer s'il existe une couleur majoritaire parmi n balles colorées. On dispose d'une étagère pour poser les balles les unes à coté des autres et d'une corbeille pouvant contenir autant de balles que nécessaire. La méthode se décompose en deux phases :
phase 1. Prendre les balles les unes après les autres en les mettant soit sur l'étagère si la dernière balle posée sur l'étagère est de couleur différente, soit dans la corbeille dans le cas contraire. Dans le premier cas on posera ensuite sur l'étagère une balle prise au hasard dans la corbeille (s'il y en a).
phase 2. Soit C la couleur de la dernière balle sur l'étagère. On va jeter les balles (pas dans la corbeille, dans la poubelle !) de l'étagère les unes après les autres en commençant par les dernières de la façon suivante : (1) si la balle à jeter est de la couleur C et si sa voisine sur l'étagère existe, les jeter toutes les deux, (2) si la dernière balle sur l'étagère n'est pas de couleur C, la jeter et jeter aussi une balle de la corbeille si elle n'est pas vide, dans le cas contraire on peut s'arreter, il n'y a pas d'élément majoritaire. Une fois le processus terminé, on regarde le contenu de la corbeille après y avoir mis éventuellement la denière boule restant sur l'étagère :

si la corbeille est vide c'est qu'il n'y a pas de couleur majoritaire, sinon c'est que la couleur majoritaire est C.

Question 1.

Montrez qu'à tout moment de la phase 1, les balles de la corbeille s'il y en a sont toutes de la couleur de la dernière balle posée sur l'étagère. En déduire qu'alors s'il y a une couleur dominante c'est cette couleur la et que l'algorithme est donc correct.

Question 2.

Ecrivez l'algorithme en utilisant des piles. Quelle est la complexité dans le pire des cas (en nombre de comparaisons de couleurs) ?