Domaine Sciences et Technologies
LICENCE INFORMATIQUE

Algorithmique 1 : TD 10

Code UE : S04IN4A2

Année 2019-2020

Graphes

Exercice 1 Soit G un graphe orienté ne contenant aucun circuit. Les arcs de G ont des poids de valeurs quelconques (positifs, négatifs ou nuls). Soient s et t deux sommets de G tels qu'il existe au moins un chemin allant de s à t, et soit C un chemin reliant s à t de poids minimal (la somme des poids de ses arcs est minimale). Nous dirons que C est un plus court chemin orienté entre s et t et nous noterons w son poids dans G.

(a) On note G' le graphe obtenu à partir de G en multipliant le poids de chaque arc par la constante positive k. Est-ce que C est un plus court chemin entre s et t dans G' ? Justifiez votre réponse ou exhibez un contre-exemple.

(b) Même question si G' est le graphe obtenu en ajoutant au poids de chaque arc de G la même valeur positive a. Justifiez ou exhibez un contre-exemple.

Exercice 2 (Algorithme de Dijkstra)
Soit G le graphe de sommets s, a, b, c, d, t, contenant les arcs $(s, a, 19)$, $(s, b, 2)$, $(a, t, 1)$, $(d, t, 7)$, $(c, d, 3)$, $(d, a, 2)$, $(c, a, 7)$, $(b, d, 10)$, $(a, b, 17)$, $(b, c, 2)$, $(c, t, 12)$.
Dessinez le graphe G, puis calculez le plus court chemin entre les sommets s et t au moyen de l'algorithme de Dijkstra. Vous représenterez dans un tableau à deux dimensions les valeurs de la distance d pour chaque sommet du graphe à chaque étape de l'algorithme : ainsi la iè colonne du tableau contient les valeurs de la distance d à l'étape i (lors de la iè extraction). Vous pouvez indiquer entre parenthèses le numéro du sommet intermédiaire qui a permis d'obtenir cette distance (le *père* ou *prédécesseur*).

Exercice 3 (Le randonneur)
Un randonneur veut effectuer un parcours en montagne sur plusieurs jours. Ce parcours est jalonné d'étapes auxquelles il peut faire halte pour passer la nuit. Pour chaque étape on connait le tarif de la nuitée et la durée du trajet depuis l'étape précédente. Le problème du randonneur est de choisir ses étapes, sachant qu'il ne veut pas marcher plus de 8 heures par jour, et qu'il désire dépenser le moins d'argent possible.

(a) Supposons qu'il y a 10 étapes possibles (non compris le départ et l'arrivée), dont les tarifs sont $20, 30, 25, 50, 30, 20, 80, 60, 40, 30$, et les durées des trajets entre deux étapes consécutives $4, 3, 6, 1$, 4, 2, 3, 5, 2, $4, 2$. Quel est le trajet optimal ?

(b) On veut modéliser ce problème avec des graphes et un calcul de plus courts chemins. Dessinez le graphe correspondant à l'exemple précédent.
Définissez de façon formelle le graphe de modélisation dans le cas général (i.e. pour n étapes avec les tarifs $c_1, \ldots, c_n$) et les durées de trajet $d_0, d_1, \ldots, d_n$).

(c) Traitez le problème en utilisant la programmation dynamique.